Математика

Сборник индивидуальных заданий
и методические рекомендации
к их решению

Вариант 1

Задача 1. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$yy' \sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0$$

Задача 2. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$xy' = \frac{10yx^2 + 3y^3}{2y^2 + 5x^2}$$

Задача 3. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' = \frac{2x - y + 1}{x - 2y + 1}$$

Задача 4. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x} e^x$$

Задача 5. **Найти решение задачи Коши**

$$y' + 2y = 2\cos^2 x - \sin 2x, \ \ y(0) = -1$$

Задача 6. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$4xy' - 6y = -(5x^2 + 3)y^3$$

Задача 7. **Найти решение задачи Коши**

$$xy' + y = xy^2, \ y(1) = 1$$

Задача 8. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''' \, tg 5x = 5y''$$

Задача 9. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' y^3 + 1 = 0, \ y(1) = -1, \ y'(1) = -1$$

Задача 10. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' - y' + 2{,}5y = 0$$

Задача 11. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$2y^{(5)} - y^{(4)} = 0$$

Задача 12. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' + 6y' + 10y = 74e^{3x}$$

Задача 13. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' + 2y' + 5y = 10\cos x$$

Задача 14. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''' - 100y' = 20e^{10x} + 100\cos 10x$$

Задача 15. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' - 2y' + y = -12\cos 2x - 9\sin 2x,$$

$$y(0) = -2, y'(0) = 0$$

Задача 16. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^{-x}},$$

$$y(0) = 1 + 2\ln 2, \ \ y'(0) = 3\ln 2$$

Вариант 2

Задача 1. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$\sqrt{4-x^2}\,y' + xy^2 + x = 0$$

Задача 2. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$xy' = 3\sqrt{2x^2 + y^2} + y$$

Задача 3. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' = \frac{x+y-2}{2x-2}$$

Задача 4. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}$$

Задача 5. **Найти решение задачи Коши**

$$y' + \frac{4xy}{1+x^2} = \frac{3}{1+x^2}, \quad y(0) = 0$$

Задача 6. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$xy' + y = 2y^2 \ln x$$

Задача 7. **Найти решение задачи Коши**

$$y' + 2xy = 2xy^3,\ y(0) = 1$$

Задача 8. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$xy'' \ln x = y'$$

Задача 9. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' = y'e^y,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$$

Задача 10. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' - y' + 6{,}5y = 0$$

Задача 11. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''' - 2y'' - 3y' = 0$$

Задача 12. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' + 5y' = 72e^{2x}$$

Задача 13. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' - 2y' + 3y = e^{-x}\cos x$$

Задача 14. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$2y'' - 7y' + 3y = (2x+1)e^{3x} + \cos 3x$$

Задача 15. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 39x + 65,$$

$$y(0) = -1, y'(0) = 1$$

Задача 16. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^3},$$

$$y(1) = e^{-2},\ y'(1) = 0.5e^{-2}$$

Вариант 3

Задача 1. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$\sqrt{5+y^2}+yy'\sqrt{1-x^2}=0$$

Задача 2. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$xy'=\frac{12yx^2+3y^3}{2y^2+6x^2}$$

Задача 3. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y'=\frac{3y-x-4}{3x-3}$$

Задача 4. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y'+\frac{y}{x}=3x$$

Задача 5. **Найти решение задачи Коши**

$$y'+ytgx=\frac{1}{\cos x},\quad y(0)=0$$

Задача 6. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$2(xy'+y)=xy^2$$

Задача 7. **Найти решение задачи Коши**

$$y'-\frac{3y}{x}=-y^2x^3,\ y(1)=1$$

Задача 8. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$x^3y''+x^2y'=1$$

Задача 9. **Найти решение задачи Коши**

$$y'^2+2yy''=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=1$$

Задача 10. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y''-y'+12{,}5y=0$$

Задача 11. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'''-5y''+3y'=0$$

Задача 12. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$6y''-y'-y=3e^{2x}$$

Задача 13. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''+2y'+y=xe^x$$

Задача 14. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$3y''-7y'+2y=3xe^{2x}+\sin 2x-3\cos 2x$$

Задача 15. **Найти решение задачи Коши**

$$y''+2y'+2y=2x^2+8x+6,$$

$$y(0)=1,y'(0)=4$$

Задача 16. **Найти решение задачи Коши**

$$y''+y=\frac{1}{\sin x},\ y(\frac{\pi}{2})=0,\ y'(\frac{\pi}{2})=0$$

Вариант 4

Задача 1. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y\ln y + xy' = 0$$

Задача 2. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y$$

Задача 3. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' = \frac{2y-2}{x+y-2}$$

Задача 4. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' - \frac{1-2x}{x^2}y = 1$$

Задача 5. **Найти решение задачи Коши**

$$y' + y = \frac{e^{-x}}{1-x}, \quad y(0) = 0$$

Задача 6. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y' + 4x^3 y = 4(x^3+1)e^{-4x}y^2$$

Задача 7. **Найти решение задачи Коши**

$$y' - \frac{y}{x} = -y,\ y(1) = 1$$

Задача 8. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$x^2 y''' = y''^3$$

Задача 9. **Найти решение задачи Коши**

$$yy'' + y'^2 = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$$

Задача 10. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' - y' + 0{,}5y = 0$$

Задача 11. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''' - 6y'' + 9y' = 0$$

Задача 12. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' + 8y' + 25y = 18e^{5x}$$

Задача 13. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' + 2y' + 10y = xe^x$$

Задача 14. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$2y'' + y' - y = (x^2 - 5)e^{-x} + x\sin x$$

Задача 15. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' - 6y' + 25y = -24\cos 4x + 9\sin 4x,$$

$$y(0) = 2, y'(0) = -2$$

Задача 16. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x},\ y(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{4},\ y'(\frac{\pi}{4}) = 0$$

Вариант 5

Задача 1. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$\sqrt{1-x^2}\,y' + xy^2 + x = 0$$

Задача 2. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$xy' = \frac{14yx^2 + 3y^3}{2y^2 + 7x^2}$$

Задача 3. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' = \frac{x + y - 2}{3x - y - 2}$$

Задача 4. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' + 2xy = -2x^3$$

Задача 5. **Найти решение задачи Коши**

$$xy' - 2y = 2x^4, \quad y(1) = 0$$

Задача 6. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$xy' - y = -y^2(\ln x + 2)\ln x$$

Задача 7. **Найти решение задачи Коши**

$$xy' + y = -xy^2,\ y(1) = -1$$

Задача 8. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' + y'\frac{1}{x} = 0$$

Задача 9. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' + 2yy'^3 = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = \frac{1}{3}$$

Задача 11. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y^{(5)} - y^{(4)} = 0$$

Задача 12. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' - y = e^{-x}$$

Задача 13. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' - y = xe^x$$

Задача 14. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$2y'' - 9y' + 4y = -2e^{4x} + e^x \cos 4x$$

Задача 15. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' - 14y' + 53y = 53x^3 - 42x^2 + 59x - 14,$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 7$$

Задача 16. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' + 5y' + 6y = \frac{1}{1 + e^{2x}},$$

$$y(0) = -1, \quad y'(0) = \frac{3}{2}$$

Вариант 6

Задача 1. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y(1+\ln y)+xy'=0$$

Задача 2. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$xy'=4\sqrt{x^2+y^2}+y$$

Задача 3. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y'=\frac{2x+y-3}{x-1}$$

Задача 4. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y'+xy=-x^3$$

Задача 5. **Найти решение задачи Коши**

$$y'-2xy=2x^3,\quad y(0)=0$$

Задача 6. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$2(y'+xy)=(1+x)e^{-x}y^2$$

Задача 7. **Найти решение задачи Коши**

$$y'+y\cos x=y^2\cos x,\ y(0)=\frac{1}{2}$$

Задача 8. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$xy''+2y'=0$$

Задача 9. **Найти решение задачи Коши**

$$y''tgy=2y'^2,\ y(1)=\frac{\pi}{2},\ y'(1)=2$$

Задача 10. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y''-3y'+4{,}5y=0$$

Задача 11. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'''+3y''+2y'=0$$

Задача 12. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y''-y=2\cos x$$

Задача 13. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''-2y'+5y=10e^{-x}\cos 2x$$

Задача 14. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''+49y=x^3+4x++3\sin 7x$$

Задача 15. **Найти решение задачи Коши**

$$y''-12y'+36y=32\cos 2x+24\sin 2x,$$

$$y(0)=2, y'(0)=4$$

Задача 16. **Найти решение задачи Коши**

$$y''+y=\frac{2}{\sin^3 x},\ y(\frac{\pi}{2})=0,\ y'(\frac{\pi}{2})=0$$

Вариант 7

Задача 1. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$\sqrt{3+y^2}+yy'\sqrt{1-x^2}=0$$

Задача 2. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$xy'=4\sqrt{2x^2+y^2}+y$$

Задача 3. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y'=\frac{x+7y-8}{9x-y-8}$$

Задача 4. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y'+2xy=xe^{-x^2}\sin x$$

Задача 5. **Найти решение задачи Коши**

$$y'+\frac{y}{x}=-\frac{1}{x^2},\quad y(1)=0$$

Задача 6. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$3(xy'+y)=y^2\ln x$$

Задача 7. **Найти решение задачи Коши**

$$y'-y=y^2e^x,\ y(0)=-1$$

Задача 8. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''+y'tgx=\sin 2x$$

Задача 9. **Найти решение задачи Коши**

$$2yy''=y'^2,\ y(0)=1,\ y'(0)=1$$

Задача 10. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y''-3y'+8{,}5y=0$$

Задача 11. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'''+y''-2y'=0$$

Задача 12. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y''-y=e^x$$

Задача 13. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''+6y'+9y=e^x(48x+8)$$

Задача 14. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$3y''+10y'+3y=e^{-3x}+2\cos 3x-\sin 3x$$

Задача 15. **Найти решение задачи Коши**

$$y''+y=x^3-4x^2+7x-10,$$

$$y(0)=2, y'(0)=3$$

Задача 16. **Найти решение задачи Коши**

$$y''+4y=\cos^2 x,\ y(0)=0,\ y'(0)=0$$

Вариант 8

Задача 1. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$3(x^2y+y)dy+\sqrt{2+y^2}\,dx=0$$

Задача 2. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$x^2y'=y^2+xy$$

Задача 3. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y'=\frac{x+3y+4}{3x-6}$$

Задача 4. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y'-y\cos x=-\sin 2x$$

Задача 5. **Найти решение задачи Коши**

$$xy'+y=2x^3+3x^2,\quad y(1)=2$$

Задача 6. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$2y'+y\cos x=y^{-1}\cos x(1+\sin x)$$

Задача 7. **Найти решение задачи Коши**

$$y'+xy=y^2e^{-x},\ y(0)=1$$

Задача 8. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$2xy'y''=y'^2-1$$

Задача 9. **Найти решение задачи Коши**

$$yy''-y'^2=y^4,\ y(0)=1,\ y'(0)=1$$

Задача 10. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y''+y'+2{,}5y=0$$

Задача 11. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'''-3y''+2y'=0$$

Задача 12. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y''-12y'+40y=2e^{6x}$$

Задача 13. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''-4y'+4y=e^{2x}\sin 6x$$

Задача 14. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''-y'+y=7x+2+e^x\cos x$$

Задача 15. **Найти решение задачи Коши**

$$y''+8y'+16y=16x^2-16x+66,$$

$$y(0)=3,\ y'(0)=0$$

Задача 16. **Найти решение задачи Коши**

$$y''-y'=e^{2x}\cos e^x,$$

$$y(\ln\frac{\pi}{2})=0,\quad y'(\ln\frac{\pi}{2})=0$$

Вариант 9

Задача 1. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$6x\,dx - 2y\,dy = 2yx^2dy - 3xy^2dx$$

Задача 2. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y + y'(2\sqrt{xy} - x) = 0$$

Задача 3. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' = \frac{3y+3}{2x+y-1}$$

Задача 4. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}$$

Задача 5. **Найти решение задачи Коши**

$$y' + \frac{y}{1+x} = x^2, \quad y(0) = 0$$

Задача 6. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y' + 4x^3y = 4y^2e^{4x}(1 - x^3)$$

Задача 7. **Найти решение задачи Коши**

$$y' - \frac{3y}{x} = xy^2,\ y(1) = 1$$

Задача 8. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$x^2y'' + y'^2 = 0$$

Задача 9. **Найти решение задачи Коши**

$$(1+y)y'' = 5y'^2,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$$

Задача 10. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' + 3y' + 2{,}5y = 0$$

Задача 11. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''' + 2y'' - 3y' = 0$$

Задача 12. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' + 2y' + y = 6e^{-x}$$

Задача 13. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' - 4y' + 4y = e^{-2x}\sin 6x$$

Задача 14. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$2y'' - 9y' + 4y = 2x^2 - 5x + e^{-x}\sin 2x$$

Задача 15. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' + 10y' + 34y = -9e^{-5x},$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 6$$

Задача 16. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x},$$

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 2$$

Вариант 10

Задача 1. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$(3+e^x)yy' = e^x$$

Задача 2. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$x+y=(x-y)y'$$

Задача 3. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' = \frac{x+2y-3}{4x-y-3}$$

Задача 4. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' - y\cos x = \sin 2x$$

Задача 5. **Найти решение задачи Коши**

$$xy' + y = \sin x, \quad y(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi}$$

Задача 6. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$3y' + 2xy = 2xy^{-2}e^{-2x^2}$$

Задача 7. **Найти решение задачи Коши**

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{y^2\cos x}{x}, \; y(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}$$

Задача 8. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$xy'' = y' + x^2$$

Задача 9. **Найти решение задачи Коши**

$$yy'' - 2y'^2 = 0, \; y(0)=1, \; y'(0)=2$$

Задача 10. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' + 5y' + 6{,}5y = 0$$

Задача 11. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y^{(5)} + y^{(4)} = 0$$

Задача 12. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' - y = 5x + 2$$

Задача 13. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' + y' - 6y = e^{3x}(6x+1)$$

Задача 14. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' + 36y = 4xe^{-x} + 2\sin 6x$$

Задача 15. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' - 10y' + 25y = e^{5x},$$

$$y(0)=1, \quad y'(0)=0$$

Задача 16. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' - y' = \frac{1}{1+e^x},$$

$$y(0)=-1, \quad y'(0)=1$$

Вариант 11

Задача 1. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$(x^2+1)y' = x^2y^2 - 9x^2$$

Задача 2. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y' = \frac{2y^2}{x^2} + 3\frac{y}{x} + 3$$

Задача 3. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' = \frac{x-2y+3}{-2x-2}$$

Задача 4. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' + yx = e^x$$

Задача 5. **Найти решение задачи Коши**

$$y'x^2 + y = -e^{-\frac{2}{x}}, \quad y(2) = e$$

Задача 6. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$2xy' - 3y = -(5x^2+3)y^3$$

Задача 7. **Найти решение задачи Коши**

$$y' + xy = (1+x)e^{-x}y^2,\ y(0) = 1$$

Задача 8. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$xy''' + y'' + x = 0$$

Задача 9. **Найти решение задачи Коши**

$$y^3y'' + 9 = 0,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 3$$

Задача 10. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

Задача 11. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''' + 2y'' + 5y' = 0$$

Задача 12. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' + 9y = 6e^{3x}$$

Задача 13. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 4x$$

Задача 14. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' + y = 2e^x + 2\sin x - 6\cos x$$

Задача 15. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' - 5y' + 6y = x,$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

Задача 16. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' + \pi^2 y = \frac{\pi^2}{\cos \pi x},$$

$$y(0) = 3, \quad y'(0) = 0$$

Вариант 12

Задача 1. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$(y+2)y' = x\sqrt{y}$$

Задача 2. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$2y' = \frac{2y^2}{x^2} + 5\frac{y}{x} - 1$$

Задача 3. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' = \frac{x+8y-9}{10x-y-9}$$

Задача 4. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' + 2xy = e^{-x^2}$$

Задача 5. **Найти решение задачи Коши**

$$y'x - 2y = x^4 e^x, \quad y(1) = 0$$

Задача 6. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$3xy' + 5y = (4x-5)y^4$$

Задача 7. **Найти решение задачи Коши**

$$y' + \frac{y}{x} = 2y^2 \ln x, \; y(1) = \frac{1}{2}$$

Задача 8. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''(1+x^2) + 2xy' = x^3$$

Задача 9. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' = 128y^3, \; y(0) = 1, \; y'(0) = 8$$

Задача 10. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' - 2y' + 5y = 0$$

Задача 11. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''' - y' = 0$$

Задача 12. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' - 3y' = 2 - 6x$$

Задача 13. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 4x$$

Задача 14. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' - 3y' = 2ch3x$$

Задача 15. **Найти решение задачи Коши**

$$4y'' - 8y' + 5y = 5\cos x,$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = -1/13$$

Задача 16. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' + 3y' = \frac{9e^{3x}}{1+e^{3x}}, \; y(0) = \ln 4,$$

$$y'(0) = 3(1 - \ln 2)$$

Вариант 13

Задача 1. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$xy' = \sqrt{1-y^2}\,(x^2+8)$$

Задача 2. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y' = \frac{4y^2}{x^2} - \frac{y}{x} + 2$$

Задача 3. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' = \frac{2x+3y-5}{5x-5}$$

Задача 4. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' - 3\frac{y}{x} = x$$

Задача 5. **Найти решение задачи Коши**

$$y'x^2 + xy = 1, \quad y(e) = 1$$

Задача 6. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$2y' + 3y\cos x = e^{2x}(2+3\cos x)y^{-1}$$

Задача 7. **Найти решение задачи Коши**

$$y' + xy = (x-1)e^x y^2,\ y(0) = 1$$

Задача 8. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$2xy''' = y''$$

Задача 9. **Найти решение задачи Коши**

$$y^3 y'' + 64 = 0,\ y(0) = 4,\ y'(0) = 2$$

Задача 10. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' - 2y' + 10y = 0$$

Задача 11. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y^{(4)} - y''' = 0$$

Задача 12. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' + y = \cos x$$

Задача 13. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x$$

Задача 14. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' + 9y = -18e^{3x} - 18\sin 3x$$

Задача 15. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' + 6y' + 13y = 26x - 1,$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

Задача 16. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' + 4y = 8\,ctg\,2x,$$

$$y(\pi/4) = 5, \quad y'(\pi/4) = 4$$

Вариант 14

Задача 1. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$e^x y' = \frac{e^{2x} - 3}{y^3 - 1}$$

Задача 2. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$xy' = 5\sqrt{9x^2 + y^2} + y$$

Задача 3. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' = \frac{4y - 8}{3x + 2y - 7}$$

Задача 4. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' - 3\frac{y}{x} = x^3 e^x$$

Задача 5. **Найти решение задачи Коши**

$$y' + 2y = 8x^2 + 8x, \quad y(0) = 0$$

Задача 6. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$3(xy' + y) = xy^2$$

Задача 7. **Найти решение задачи Коши**

$$2y' - 3y\cos x = -(2 + 3\cos x)\, e^{-2x} y^{-1},$$

$$y(0) = 1$$

Задача 8. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$xy''' + y'' = x + 1$$

Задача 9. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' + 2\sin y \cos^3 y = 0,$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

Задача 10. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' - 2y' + 17y = 0$$

Задача 11. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y^{(4)} + 2y''' + y'' = 0$$

Задача 12. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' - 8y' + 7y = 14$$

Задача 13. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' + 2y' = e^x(\sin x + \cos x)$$

Задача 14. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' - 5y' = 50\,ch5x$$

Задача 15. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' - 4y = 2 - x, \; y(0) = \frac{11}{2}, y'(0) = \frac{1}{4}$$

Задача 16. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' - 6y' + 8y = \frac{4}{1 + e^{-2x}},$$

$$y(0) = 1 + 2\ln 2, \; y'(0) = 6\ln 2$$

Вариант 15

Задача 1. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$(3x+3)y' = \frac{y^2}{2y^5-7}$$

Задача 2. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$3xy' = 2\sqrt{4x^2+y^2}+3y$$

Задача 3. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' = \frac{x+3y-4}{5x-y-4}$$

Задача 4. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}$$

Задача 5. **Найти решение задачи Коши**

$$y' + \frac{y}{\cos x \sin x} = \frac{\cos x \cos 2x}{\sin x},$$

$$y(\pi/3) = 1/4$$

Задача 6. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y' - y = 2xy^2$$

Задача 7. **Найти решение задачи Коши**

$$y' - y = xy^2,\ y(0) = 1$$

Задача 8. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' tgx - y' + \frac{1}{\sin x} = 0$$

Задача 9. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' = 32\sin^3 y \cos y,$$

$$y(1) = \pi/2,\quad y'(1) = 4$$

Задача 10. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' - 4y' + 8y = 0$$

Задача 11. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$3y^{(4)} + y''' = 0$$

Задача 12. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' + 4y = 8e^{2x}$$

Задача 13. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' + 2y' = -2e^x(\sin x + \cos x)$$

Задача 14. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' - 2y' = 2ch2x$$

Задача 15. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' - y = \cos 2x,$$

$$y(0) = -1/5,\quad y'(0) = 1$$

Задача 16. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' - 9y' + 18y = \frac{9e^{3x}}{1+e^{-3x}},$$

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 0$$

Вариант 16

Задача 1. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$\frac{y\,y'}{\sin 5x} = y^2 + 4$$

Задача 2. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$xy' = 3\sqrt{16x^2 + y^2} + y$$

Задача 3. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' = \frac{-2x + y + 3}{x - 1}$$

Задача 4. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' - \frac{y}{1-x} = \frac{e^{4x}}{1-x}$$

Задача 5. **Найти решение задачи Коши**

$$y'x - y = -\frac{x^2}{\cos^2 x}, \quad y(\frac{\pi}{4}) = \pi$$

Задача 6. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$2xy' - 3y = -(20x^2 + 12)y^3$$

Задача 7. **Найти решение задачи Коши**

$$2(xy' + y) = y^2 \ln x,\ y(1) = 2$$

Задача 8. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''x^2 + xy' = 1$$

Задача 9. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' = 98y^3,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 7$$

Задача 10. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' - 4y' + 13y = 0$$

Задача 11. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''' + y'' = 0$$

Задача 12. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' - 2y' - y = e^{-x}$$

Задача 13. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' - 4y' + 8y = e^x(\sin x - \cos x)$$

Задача 14. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''' - y' = 2e^x + \cos x$$

Задача 15. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' - 2y' + 5y = 5x^2 - 4x + 2,$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 2$$

Задача 16. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' + \pi^2 y = \frac{\pi^2}{\sin \pi x},$$

$$y(\frac{1}{2}) = 1,\ y'(\frac{1}{2}) = \frac{\pi^2}{2}$$

Вариант 17

Задача 1. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$\sqrt[3]{x}\, y' = \frac{2xy^2}{1+\sqrt[3]{y}}$$

Задача 2. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2$$

Задача 3. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' = \frac{x+2y-3}{x-1}$$

Задача 4. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' - \frac{y}{2x+1} = e^{3x}\sqrt{2x+1}$$

Задача 5. **Найти решение задачи Коши**

$$y' e^{x^2} - 2xy = x, \quad y(0) = 0$$

Задача 6. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y' + 2xy = 2x^3 y^3$$

Задача 7. **Найти решение задачи Коши**

$$y' + y = xy^2,\ y(0) = 1$$

Задача 8. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''' ctg\, 2x + 2y'' = 0$$

Задача 9. **Найти решение задачи Коши**

$$y^3 y'' + 49 = 0,\ y(3) = -7,\ y'(3) = -1$$

Задача 10. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' - 4y' + 20y = 0$$

Задача 11. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$7y''' - y'' = 0$$

Задача 12. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$3y'' + 4y' = 8x + 6$$

Задача 13. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' + 2y' = 10e^x(\sin x + \cos x)$$

Задача 14. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' + 4y = 4e^{2x} - 8\sin 2x + 32\cos 2x$$

Задача 15. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' + 3y' - 10y = xe^{-2x},$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 0$$

Задача 16. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' + \frac{y}{\pi^2} = \frac{1}{\pi^2 \cos\frac{x}{\pi}},\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0$$

Вариант 18

Задача 1. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y\,y'\sqrt{4-4x^2}=\sqrt{y}-\sqrt[3]{y}-2$$

Задача 2. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'=\frac{x+y}{x-y}$$

Задача 3. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y'=\frac{3x+2y-1}{x+1}$$

Задача 4. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y'-2\frac{y}{x}=1$$

Задача 5. **Найти решение задачи Коши**

$$4xy'+y=104x^3,\quad y(8)=1$$

Задача 6. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$xy'+y=y^2\ln x$$

Задача 7. **Найти решение задачи Коши**

$$y'+2y\,cth x=y^2 ch x,\ y(1)=\frac{1}{sh1}$$

Задача 8. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$x^3y'''+x^2y''=1$$

Задача 9. **Найти решение задачи Коши**

$$4y^3y''=16y^4-1,$$

$$y(0)=\sqrt{2}/2,\ y'(0)=1/\sqrt{2}$$

Задача 10. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y''-6y'+10y=0$$

Задача 11. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$2y^{(5)}+y^{(4)}=0$$

Задача 12. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y''+y'-2y=8\sin 2x$$

Задача 13. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''-4y'+8y=e^x(3\sin x+5\cos x)$$

Задача 14. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''-y'=4e^x+10\sin x+6\cos x$$

Задача 15. **Найти решение задачи Коши**

$$y''-2y'=e^x(x^2+x-3),$$

$$y(0)=2,y'(0)=2$$

Задача 16. **Найти решение задачи Коши**

$$y''-3y'=\frac{9e^{-3x}}{3+e^{-3x}},\ y(0)=4\ln 4,$$

$$y'(0)=3(3\ln 4-1)$$

Вариант 19

Задача 1. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$\frac{2x\,y'}{e^{y}} = \frac{x(x-1)^2}{e^{3y} - e^{2y} + 1}$$

Задача 2. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 3$$

Задача 3. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' = \frac{5y+5}{4x+3y-1}$$

Задача 4. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' + y\cos x = 2\sin x\cos x$$

Задача 5. **Найти решение задачи Коши**

$$y' + xy = x^3, \quad y(0) = -1$$

Задача 6. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$2y' + 3y\cos x = (8 + 12\cos x)e^{2x}\,y^{-1}$$

Задача 7. **Найти решение задачи Коши**

$$2(y' + xy) = (x-1)e^{x}y^2,\ y(0) = 2$$

Задача 8. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'''tgx = 2y''$$

Задача 9. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' + 8\sin y\cos^3 y = 0,$$

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 2$$

Задача 10. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' - 6y' + 13y = 0$$

Задача 11. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''' - 4y'' = 0$$

Задача 12. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' - 9y' + 20y = 126e^{-2x}$$

Задача 13. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos x$$

Задача 14. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' - 4y' = 16ch4x$$

Задача 15. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' - 4y' + 4y = \sin x,$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 0$$

Задача 16. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' + y = 4ctgx,$$

$$y(\pi/2) = 4,\ y'(\pi/2) = 4$$

Вариант 20

Задача 1. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$4x\,dx - 3y\,dy = 3x^2 y\,dy - 2xy^2\,dx$$

Задача 2. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y' = \frac{x+2y}{2x-y}$$

Задача 3. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' = \frac{x+4y-5}{6x-y-5}$$

Задача 4. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' - \frac{y}{x} = x^2$$

Задача 5. **Найти решение задачи Коши**

$$xy' + 2y = 3x\cos 2x - 2x^2 \sin 2x$$

$$y(\pi/4) = 16$$

Задача 6. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$4y' + x^3 y = (x^3 + 8)e^{-2x} y^2$$

Задача 7. **Найти решение задачи Коши**

$$y' - y\,tgx = -\frac{2}{3} y^4 \sin x,\ y(0) = 1$$

Задача 8. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'''cth2x = 2y''$$

Задача 9. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' = 72y^3,\ y(2) = 1,\ y'(2) = 6$$

Задача 10. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' - 6y' + 18y = 0$$

Задача 11. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''' + 3y'' + 2y' = 0$$

Задача 12. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' + y = 3\sin 5x + 2\cos 5x$$

Задача 13. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' + 2y' = 6e^x(\sin x + \cos x)$$

Задача 14. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' + 5y' = 50\,sh5x$$

Задача 15. **Найти решение задачи Коши**

$$2y'' - y' = 1 + x,$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 1$$

Задача 16. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' - 6y' + 8y = \frac{4}{2+e^{-2x}},$$

$$y(0) = 1 + 3\ln 3,\ y'(0) = 10\ln 3$$

Вариант 21

Задача 1. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$\sqrt{4+y^2}\,dx - y\,dy = x^2 y\,dy$$

Задача 2. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 4$$

Задача 3. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' = \frac{x+y+2}{x+1}$$

Задача 4. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

Задача 5. **Найти решение задачи Коши**

$$y' - 8xy = 32x^3 - 8x, \quad y(0) = 0$$

Задача 6. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$8xy' - 12y = -(5x^2+3)y^3$$

Задача 7. **Найти решение задачи Коши**

$$xy' + y = xy^2,\ y(1) = 1$$

Задача 8. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''x^4 + x^3 y' = 1$$

Задача 9. **Найти решение задачи Коши**

$$y^3 y'' + 36 = 0,\ y(0) = 3,\ y'(0) = 2$$

Задача 10. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' + 2y' + 5y = 0$$

Задача 11. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''' - 13y'' + 12y' = 0$$

Задача 12. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' - 12y' + 36y = 14e^{6x}$$

Задача 13. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' - 4y' + 8y = e^x(4\cos x - 3\sin x)$$

Задача 14. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' + 16y = 16\cos 4x - 16e^{4x}$$

Задача 15. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' - 3y' + 2y = -e^{-2x},$$

$$y(0) = 1, y'(0) = 0$$

Задача 16. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' + 6y' + 8y = \frac{4e^{-2x}}{2+e^{2x}},$$

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 0$$

Вариант 22

Задача 1. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$6x\,dx - 6y\,dy = 2x^2 y\,dy - 3xy^2\,dx$$

Задача 2. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y' = \frac{x^2 + xy - y^2}{x^2 - 2xy}$$

Задача 3. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' = \frac{2x + y - 3}{4x - 4}$$

Задача 4. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x$$

Задача 5. **Найти решение задачи Коши**

$$xy' - y = 2\ln x - \ln^2 x, \quad y(e^2) = 4$$

Задача 6. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$2(y' + y) = x y^2$$

Задача 7. **Найти решение задачи Коши**

$$y' + 2xy = 2xy^3,\ y(0) = 1$$

Задача 8. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$x y''' + 2y'' = 0$$

Задача 9. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' = 18\sin^3 y \cos y,\ y(1) = \pi/2,\ y'(1) = 3$$

Задача 10. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' + 2y' + 10y = 0$$

Задача 11. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y^{(5)} + 2y^{(4)} = 0$$

Задача 12. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' + 4y' + 4y = \cos 2x$$

Задача 13. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' + 2y' + 5y = -\cos x$$

Задача 14. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''' - 9y' = -9e^{3x} + 18\sin 3x - 9\cos 3x$$

Задача 15. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' + y = \cos 3x,$$

$$y(\pi/2) = 4,\quad y'(\pi/2) = 1$$

Задача 16. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' + 9y = \frac{9}{\sin 3x},$$

$$y(\pi/6) = 4,\ y'(\pi/6) = 3\pi/2$$

Вариант 23

Задача 1. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$x\sqrt{3+y^2}\,dx + y\sqrt{2+x^2}\,dy = 0$$

Задача 2. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 6$$

Задача 3. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' = \frac{2x+y-3}{2x-2}$$

Задача 4. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' - \frac{y}{x} = x\sin x$$

Задача 5. **Найти решение задачи Коши**

$$xy' - 2y = 2x^4, \quad y(-1) = -2$$

Задача 6. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y' + xy = (x-1)e^x y^2$$

Задача 7. **Найти решение задачи Коши**

$$y' - \frac{3y}{x} = -y^2x^3,\ y(1) = 1$$

Задача 8. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$xy''' + y'' = 1$$

Задача 9. **Найти решение задачи Коши**

$$4y^3y'' = y^4 - 16,$$

$$y(0) = 2\sqrt{2},\ y'(0) = 1/\sqrt{2}$$

Задача 10. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' + 2y' + 17y = 0$$

Задача 11. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''' - 5y'' + 6y' = 0$$

Задача 12. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' + 9y = 9x^4 + 12x^2 - 24$$

Задача 13. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' + 2y' = 3e^x(\sin x + \cos x)$$

Задача 14. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' - y' = 2\,ch x$$

Задача 15. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' - y = e^{2x},\ y(0) = 1, y'(0) = 2$$

Задача 16. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' + 9y = \frac{9}{\cos 3x},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

Вариант 24

Задача 1. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$(e^{2x}+5)dy + y e^{2x}\,dx = 0$$

Задача 2. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y' = \frac{x^2+2xy-y^2}{2x^2-2xy}$$

Задача 3. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' = \frac{y}{2x+2y-2}$$

Задача 4. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' + \frac{y}{x} = x^2$$

Задача 5. **Найти решение задачи Коши**

$$y' - \frac{3y}{x} = \frac{x+2}{x^3(1-x)}, \quad y(2) = \frac{1}{4}$$

Задача 6. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$2y' - 3y\cos x = -e^{-2x}(2+3\cos x)y^{-1}$$

Задача 7. **Найти решение задачи Коши**

$$y' - \frac{y}{x} = -y,\ y(1) = 1$$

Задача 8. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$x^5 y''' + x^4 y'' = 1$$

Задача 9. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' = 50y^3,\ y(3) = 1,\ y'(3) = 5$$

Задача 10. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' + 4y' + 5y = 0$$

Задача 11. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''' + 6y'' + 13y' = 0$$

Задача 12. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' - 2y' + y = 2e^x$$

Задача 13. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 8x$$

Задача 14. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' + 36y = 39e^{6x} + 24\sin 6x - 12\cos 6x$$

Задача 15. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' - 4y = 3xe^{-x},\ y(0) = 0, y'(0) = 0$$

Задача 16. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' - y' = \frac{e^{-x}}{2+e^{-x}},\ y(0) = \ln 27,$$

$$y'(0) = \ln 9 - 1$$

Вариант 25

Задача 1. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$6x\,dx - 6y\,dy = 3x^2 y\,dy - 2xy^2\,dx$$

Задача 2. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 8$$

Задача 3. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' = \frac{x + 5y - 6}{7x - y - 6}$$

Задача 4. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' - \frac{2x - 5}{x^2}y = 5$$

Задача 5. **Найти решение задачи Коши**

$$2y'x^2 + y = -e^{-\frac{1}{x}}, \quad y(1) = e$$

Задача 6. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y' - y = x\,y^2$$

Задача 7. **Найти решение задачи Коши**

$$xy' + y = -xy^2,\ y(1) = -1$$

Задача 8. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$x\,y''' - y'' + \frac{1}{x} = 0$$

Задача 9. **Найти решение задачи Коши**

$$y^3 y'' + 25 = 0,\ y(2) = -5,\ y'(2) = -1$$

Задача 10. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' + 4y' + 8y = 0$$

Задача 11. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''' - 4y'' + 3y' = 0$$

Задача 12. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$$

Задача 13. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' + y = 3\sin 4x + 2\cos 4x$$

Задача 14. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''' - 25y' = -50e^{5x} + 25(\sin 5x + \cos 5x)$$

Задача 15. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' + 4y = \sin x,$$

$$y(0) =, y'(0) = 0$$

Задача 16. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' + 4y = 4ctg\,2x,$$

$$y(\pi/4) = 3,\ y'(\pi/4) = 2$$

Вариант 26

Задача 1. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$x\sqrt{5+y^2}\,dx + y\sqrt{4+x^2}\,dy = 0$$

Задача 2. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y' = \frac{x^2+3xy-y^2}{3x^2-2xy}$$

Задача 3. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' = \frac{x+y-4}{x-2}$$

Задача 4. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' - \frac{y}{x} = -2\frac{\ln x}{x}$$

Задача 5. **Найти решение задачи Коши**

$$y'x^2 + xy = -\sqrt{x}, \quad y(4) = -\frac{1}{2}$$

Задача 6. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$2(xy' + y) = y^2 \ln x$$

Задача 7. **Найти решение задачи Коши**

$$y' + y\cos x = y^2\cos x,\ y(0) = \frac{1}{2}$$

Задача 8. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'''\,x\,\ln x = y''$$

Задача 9. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' + 18\sin y\cos^3 y = 0,$$

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 3$$

Задача 10. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' + y' + 13y = 0$$

Задача 11. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$7y'''' - 5y'' = 0$$

Задача 12. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' - 4y' + 3y = 12\sin x - 4\cos x$$

Задача 13. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' - 4y' + 8y = e^x(-\sin x + 2\cos x)$$

Задача 14. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' + 3y' = 2\,sh3x$$

Задача 15. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' - 2y' + 2y = 2x,\ y(0) = 0, y'(0) = 0$$

Задача 16. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{3+e^{-x}},$$

$$y(0) = 1 + 8\ln 2,\ y'(0) = 14\ln 2$$

Вариант 27

Задача 1. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y(4+e^x)dy - e^x dx = 0$$

Задача 2. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 12$$

Задача 3. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' = \frac{2x+y-1}{2x-2}$$

Задача 4. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' + \frac{2y}{x} = x^3$$

Задача 5. **Найти решение задачи Коши**

$$y' - \frac{2y}{\sin 2x} = \sin 2x - tgx, \quad y(\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}$$

Задача 6. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y' + y = x y^2$$

Задача 7. **Найти решение задачи Коши**

$$y' - y = y^2 e^x, \; y(0) = -1$$

Задача 8. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y^{(4)} thx = y'''$$

Задача 9. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' = 8\sin^3 y \cos y, \; y(1) = \frac{\pi}{2}, \; y'(1) = 2$$

Задача 10. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' + 4y' + 20y = 0$$

Задача 11. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y^{(5)} - 2y^{(4)} = 0$$

Задача 12. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' + 36y = 36 + 66x - 36x^3$$

Задача 13. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' - 3y' + 2y = e^{-x}(34 - 12x)$$

Задача 14. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' + 49y = -98e^{7x} + 14\sin 7x + 7\cos 7x$$

Задача 15. **Найти решение задачи Коши**

$$2y'' + y' - y = 2e^x, \; y(0) = 0, y'(0) = 1$$

Задача 16. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' - 6y' + 8y = \frac{4e^{2x}}{1+e^{2x}},$$

$$y(0) = 0, \; y'(0) = 0$$

Вариант 28

Задача 1. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$2x\,dx - 2y\,dy = x^2 y\,dy - 2xy^2\,dx$$

Задача 2. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y' = \frac{x^2 + xy - 3y^2}{x^2 - 4xy}$$

Задача 3. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' = \frac{-2x + 3y + 1}{3x + 3}$$

Задача 4. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' - \frac{2xy}{1 + x^2} = 1 + x^2$$

Задача 5. **Найти решение задачи Коши**

$$y' + y = x^2 + 2x, \quad y(0) = 2$$

Задача 6. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y' + 2y\,\mathrm{cth}\,x = y^2 ch\,x$$

Задача 7. **Найти решение задачи Коши**

$$y' + xy = y^2 e^{-x},\ y(0) = 1$$

Задача 8. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''' tg x = y'' + 1$$

Задача 9. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' = 32y^3,\ y(4) = 1,\ y'(4) = 4$$

Задача 10. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' + 6y' + 10y = 0$$

Задача 11. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''' + 2y'' + 5y' = 0$$

Задача 12. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' + 4y = 2\sin 2x$$

Задача 13. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' + 4y' = e^x(2\sin 2x + 24\cos 2x)$$

Задача 14. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''' - 36y' = 36e^{6x} - 72(\sin 6x + \cos 6x)$$

Задача 15. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' - 4y' + 3y = e^{5x},\ y(0) = 3, y'(0) = 9$$

Задача 16. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' + 16y = \frac{16}{\sin 4x},\ y(\frac{\pi}{8}) = 3,\ y'(\frac{\pi}{8}) = 2\pi$$

Вариант 29

Задача 1. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$x\sqrt{4+y^2}\,dx + y\sqrt{1+x^2}\,dy = 0$$

Задача 2. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$4y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 5$$

Задача 3. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' = \frac{6y-6}{5x+4y-9}$$

Задача 4. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}$$

Задача 5. **Найти решение задачи Коши**

$$2y'x - 6y = \frac{7}{\sqrt{x}}, \quad y(1) = -4$$

Задача 6. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$2(y' + xy) = (x-1)e^x y^2$$

Задача 7. **Найти решение задачи Коши**

$$y' - \frac{3y}{x} = xy^2,\ y(1) = 1$$

Задача 8. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''' th7x = 7y''$$

Задача 9. **Найти решение задачи Коши**

$$y^3 y'' + 16 = 0,\ y(1) = 2,\ y'(1) = 2$$

Задача 10. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' + 6y' + 13y = 0$$

Задача 11. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''' + 3y'' + 2y' = 0$$

Задача 12. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' + 6y' + 5y = e^{2x}$$

Задача 13. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' + y = 3sin7x + 2cos7x$$

Задача 14. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' + 4y' = 16sh4x$$

Задача 15. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' + 4y = 5e^x,\ y(0) = 0, y'(0) = 1$$

Задача 16. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' + 16y = \frac{16}{cos4x},\ y(0) = 3,\ y'(0) = 0$$

Вариант 30

Задача 1. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$(8+e^x)dy - y e^x dx = 0$$

Задача 2. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y' = \frac{x^2 + xy - 5y^2}{x^2 - 6xy}$$

Задача 3. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' = \frac{x + 6y - 7}{8x - y - 7}$$

Задача 4. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' + \frac{xy}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2}$$

Задача 5. **Найти решение задачи Коши**

$$y' - 3y = \sin x + 3\cos x, \quad y(\frac{\pi}{2}) = e^{\frac{\pi}{2}}$$

Задача 6. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y' - y\,tg\,x = -\frac{2}{3}y^4 \sin x$$

Задача 7. **Найти решение задачи Коши**

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{y^2 \cos x}{x}, \; y(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}$$

Задача 8. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' cthx - y' + \frac{1}{chx} = 0$$

Задача 9. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' + 32 \sin y \cos^3 y = 0,$$

$$y(0) = 0, \; y'(0) = 4$$

Задача 10. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' + 6y' + 18y = 0$$

Задача 11. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''' - y'' - 2y' = 0$$

Задача 12. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' + 2y' + 37y = 37x^2 - 33x + 74$$

Задача 13. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' - 4y' + 8y = e^x(5\sin x - 3\cos x)$$

Задача 14. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' + 64y = -64e^{8x} + 16(\sin 8x - \cos 8x)$$

Задача 15. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' + 6y' + 8y = 3x^2 + 2x + 1,$$

$$y(0) = 17/64, \; y'(0) = 0$$

Задача 16. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{e^x}{1+e^{-x}},$$

$$y(0) = 0, \; y'(0) = 0$$

Вариант 31

Задача 1. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$6x\,dx - y\,dy = x^2 y\,dy - 3xy^2\,dx$$

Задача 2. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$3y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 10$$

Задача 3. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' = \frac{y+2}{2x+y-4}$$

Задача 4. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' - \frac{2y}{1+x} = e^x(1+x)^2$$

Задача 5. **Найти решение задачи Коши**

$$y'\sin 2x + y = 2\cos^2 x\,\cos 2x,$$

$$y(5\pi/4) = 3/2$$

Задача 6. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$xy' + y = x\,y^2$$

Задача 7. **Найти решение задачи Коши**

$$y' + xy = (1+x)\,e^{-x}y^2,\ y(0) = 1$$

Задача 8. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$(1+\sin x)\,y''' = y''\cos x$$

Задача 9. **Найти решение задачи Коши**

$$4y^3y'' = y^4 - 1,\ y(0) = \sqrt{2},\ y'(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Задача 10. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' + 6y' + 25y = 0$$

Задача 11. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y^{(5)} - y^{(4)} = 0$$

Задача 12. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' - 7y' + 12y = x$$

Задача 13. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 3x$$

Задача 14. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''' - 49y' = 14e^{7x} - 49(\sin 7x + \cos 7x)$$

Задача 15. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' + y = xe^x,\ y(0) = \frac{1}{2}, y'(0) = 1$$

Задача 16. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' - 2y' = \frac{4e^{-2x}}{1+e^{-2x}},$$

$$y(0) = \ln 4,\ y'(0) = \ln 4 - 2$$

Вариант 32

Задача 1. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$(1+e^x)y' = ye^x$$

Задача 2. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y' = \frac{x^2+2xy-5y^2}{2x^2-6xy}$$

Задача 3. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' = \frac{-x+2y-5}{2x-y+4}$$

Задача 4. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' - \frac{2y}{1+x} = (1+x)^3$$

Задача 5. **Найти решение задачи Коши**

$$y'\cos x - y\sin x = 1, \quad y(\ln 2) = 1$$

Задача 6. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^2}$$

Задача 7. **Найти решение задачи Коши**

$$y' + \frac{y}{x} = 2y^2 \ln x,\ y(1) = \frac{1}{2}$$

Задача 8. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$-xy''' + 2y'' = \frac{2}{x^2}$$

Задача 9. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' = 18y^3,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 3$$

Задача 10. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' - 6y' + 25y = 0$$

Задача 11. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''' - y'' - 9y' = 0$$

Задача 12. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' - 4y = x + 1$$

Задача 13. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' + y = -3\sin 3x + 2\cos 3x$$

Задача 14. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' - 4y' = 24e^{2x} + 8\sin 2x - 4\cos 2x$$

Задача 15. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' - y = 2 - 2x,\ y(0) = 0, y'(0) = 1$$

Задача 16. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' + \frac{y}{4} = \frac{1}{4}ctg\frac{x}{2},$$

$$y(\pi) = 2,\ y'(\pi) = \frac{1}{2}$$

Вариант 33

Задача 1. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$x\,dx - y\,dy = x^2 y\,dy - xy^2\,dx$$

Задача 2. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$xy' = \frac{2yx^2 + 3y^3}{2y^2 + x^2}$$

Задача 3. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' = \frac{x + y - 3}{x - y - 1}$$

Задача 4. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' - 4xy = -4x^3$$

Задача 5. **Найти решение задачи Коши**

$$4xy' + y = 13x^3, \quad y(1) = 5$$

Задача 6. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y' + x\,y = x^3\,y^3$$

Задача 7. **Найти решение задачи Коши**

$$y' + xy = (x - 1)\,e^x y^2,\ y(0) = 1$$

Задача 8. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' x^4 + x^3 y' = 4$$

Задача 9. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' = 50\sin^3 y \cos y,\ y(1) = \frac{\pi}{2},\ y'(1) = 5$$

Задача 10. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' - 8y' + 17y = 0$$

Задача 11. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''' - 4y'' + 8y' = 0$$

Задача 12. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' - 9y = x + 1$$

Задача 13. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 5x$$

Задача 14. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' + 81y = 162e^{9x} + 9\sin 9x + 3\cos 9x$$

Задача 15. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' - y = 9xe^{2x},\ y(0) = 0, y'(0) = -5$$

Задача 16. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{2 + e^{-x}},$$

$$y(0) = 1 + 3\ln 3,\ y'(0) = 5\ln 3$$

Вариант 34

Задача 1. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$\sqrt{5+y^2}\,dx+4(x^2y+y)dy=0$$

Задача 2. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$xy'=\sqrt{x^2+y^2}+y$$

Задача 3. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y'=\frac{2x+3y-5}{x+4y}$$

Задача 4. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y'-3x^2y=\frac{x^2(1+x^3)}{3}$$

Задача 5. **Найти решение задачи Коши**

$$y'x^2+2xy=\frac{2}{x^2+4},\quad y(2)=\frac{\pi}{8}$$

Задача 6. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'-y\sin x=y^2e^{\cos x}$$

Задача 7. **Найти решение задачи Коши**

$$2y'-3y\cos x=-(2+3\cos x)\,e^{-2x}y^{-1},$$

$$y(0)=1$$

Задача 8. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''(1+x^2)+2xy'=12x^3$$

Задача 9. **Найти решение задачи Коши**

$$y^3y''=4(y^4-1),\ y(0)=\sqrt{2},\ y'(0)=\sqrt{2}$$

Задача 10. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y''-8y'+20y=0$$

Задача 11. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'''-4y''+4y'=0$$

Задача 12. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y''-6y'+9y=e^x$$

Задача 13. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''-4y'+4y=e^{2x}\sin 5x$$

Задача 14. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'''-64y'=-64e^{8x}+128\cos 8x$$

Задача 15. **Найти решение задачи Коши**

$$y''-6y'+9y=e^{3x},\ y(0)=1, y'(0)=0$$

Задача 16. **Найти решение задачи Коши**

$$y''+3y'+2y=\frac{e^{-x}}{2+e^x},$$

$$y(0)=0,\ y'(0)=0$$

Вариант 35

Задача 1. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$(1+e^x)\,y\,y' = e^x$$

Задача 2. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$xy' = \frac{4yx^2+3y^3}{2y^2+2x^2}$$

Задача 3. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' = \frac{x+2y-3}{2x-2}$$

Задача 4. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{-2}{x^2}$$

Задача 5. **Найти решение задачи Коши**

$$\frac{xy'}{2} - y\ln x = \ln^2 x, \quad y(1) = 2$$

Задача 6. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y' + \frac{2y}{x} = y^2 x$$

Задача 7. **Найти решение задачи Коши**

$$y' - y = xy^2,\ y(0) = 1$$

Задача 8. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$x\,y''' + y'' = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Задача 9. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' + 50\sin y\cos^3 y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 5$$

Задача 10. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' - 8y' + 25y = 0$$

Задача 11. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y^{(4)} + y''' = 0$$

Задача 12. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$4y'' - 12y' + 9y = e^x$$

Задача 13. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' + 2y' + 5y = -17\sin 2x$$

Задача 14. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' + y' = 2\,shx$$

Задача 15. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' + 4y = e^{-2x},\ y(0) = 0, y'(0) = 0$$

Задача 16. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' + 4y = \frac{4}{\sin 2x},$$

$$y(\frac{\pi}{4}) = 2,\ y'(\frac{\pi}{4}) = \pi$$

Вариант 36

Задача 1. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$2x\,dx - y\,dy = x^2 y\,dy - xy^2\,dx$$

Задача 2. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y$$

Задача 3. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' = \frac{-x - y + 2}{x - y + 4}$$

Задача 4. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' - y\,ctgx = 2x\,\sin x$$

Задача 5. **Найти решение задачи Коши**

$$2y'x^2 + 2xy = -\sqrt{x}, \quad y(1) = -\frac{1}{2}$$

Задача 6. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y' + 2y = e^x y^2$$

Задача 7. **Найти решение задачи Коши**

$$2(xy' + y) = y^2 \ln x,\ y(1) = 2$$

Задача 8. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$x\,y''' + y'' = \sqrt{x}$$

Задача 9. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' = 8y^3,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$$

Задача 10. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' - 8y' + 32y = 0$$

Задача 11. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''' - 4y'' + 4y' = 0$$

Задача 12. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' - 7y' + 12y = e^{2x}$$

Задача 13. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' - y = x\,e^x$$

Задача 14. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' + 25y = 50e^{5x} - 10\sin 5x + 20\cos 5x$$

Задача 15. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' - 4y' + 5y = xe^{2x},\ y(0) = -1, y'(0) = 0$$

Задача 16. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' + 4y = \frac{4}{\cos 2x},\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0$$

Вариант 37

Задача 1. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$2x + 2xy^2 + \sqrt{2 - x^2}\, y' = 0$$

Задача 2. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$xy' = \frac{6yx^2 + 3y^3}{2y^2 + 3x^2}$$

Задача 3. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' = \frac{x - 2y - 3}{-2x - 2}$$

Задача 4. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' + y\,tgx = cos^2 x$$

Задача 5. **Найти решение задачи Коши**

$$y'x + 2y = 2\sin^2 x + x\sin 2x,\ \ y(\frac{\pi}{4}) = \frac{3}{2}$$

Задача 6. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y' - y\,tg\,x = y^4 \cos x$$

Задача 7. **Найти решение задачи Коши**

$$y' + y = xy^2,\ y(0) = 1$$

Задача 8. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$x^3 y''' + x^2 y'' = \sqrt{x}$$

Задача 9. **Найти решение задачи Коши**

$$y^3 y'' + 4 = 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = -2$$

Задача 10. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' + 8y' + 17y = 0$$

Задача 11. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''' + y'' - 6y' = 0$$

Задача 12. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$$

Задача 13. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' - 4y' + 4y = -e^{2x} \sin 4x$$

Задача 14. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''' - 16y' = 48e^{4x} + 64(\cos 4x - \sin 4x)$$

Задача 15. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' - 3y' - 4y = 17\sin x,$$

$$y(0) = 4, y'(0) = 0$$

Задача 16. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' + y' = \frac{e^x}{2 + e^x},\ y(0) = \ln 27,$$

$$y'(0) = 1 - \ln 9$$

Вариант 38

Задача 1. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$20x\,dx - 3y\,dy = 3x^2 y\,dy - 5xy^2\,dx$$

Задача 2. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y$$

Задача 3. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' = \frac{x + 2y - 3}{x - 1}$$

Задача 4. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' - \frac{y}{1+x} = e^x(1+x)$$

Задача 5. **Найти решение задачи Коши**

$$y' - 2xy = 2x - 2x^3, \quad y(0) = -2$$

Задача 6. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y' + xy = (1+x)e^{-x}y^2$$

Задача 7. **Найти решение задачи Коши**

$$y' + 2y\,cthx = y^2 chx,\ y(1) = \frac{1}{sh1}$$

Задача 8. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$(x+1)y''' + y'' = x + 1$$

Задача 9. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' = 2\sin^3 y\cos y,\ y(1) = \frac{\pi}{2},\ y'(1) = 1$$

Задача 10. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' + 8y' + 20y = 0$$

Задача 11. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''' + 4y'' + 3y' = 0$$

Задача 12. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' + y' = 2x - 1$$

Задача 13. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' + y = -3\sin 7x + 2\cos 7x$$

Задача 14. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' + y' = 2sh2x$$

Задача 15. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(3 - 4x),$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 0$$

Задача 16. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' + y = 2ctgx,\ y(\frac{\pi}{2}) = 1,\ y'(\frac{\pi}{2}) = 2$$

Вариант 39

Задача 1. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0$$

Задача 2. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$xy'=\frac{8yx^2+3y^3}{2y^2+4x^2}$$

Задача 3. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y'=\frac{x+6y-7}{3x-3}$$

Задача 4. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y'+\frac{y}{x}=\sin x$$

Задача 5. **Найти решение задачи Коши**

$$y'-ytgx=2x-x^2tgx,\quad y(\pi)=0$$

Задача 6. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$5y'+10xy=2x^3y^3$$

Задача 7. **Найти решение задачи Коши**

$$2(y'+xy)=(x-1)e^xy^2,\ y(0)=2$$

Задача 8. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''cthx+y'=chx$$

Задача 9. **Найти решение задачи Коши**

$$y^3y''=y^4-16,\ y(0)=2\sqrt{2},\ y'(0)=\sqrt{2}$$

Задача 10. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y''+8y'+25y=0$$

Задача 11. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'''+6y''+9y'=0$$

Задача 12. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y''+y=\sin x$$

Задача 13. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''+2y'+5y=-2\sin x$$

Задача 14. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''+100y=-200e^{10x}+$$
$$+20\sin 10x-30\cos 10x$$

Задача 15. **Найти решение задачи Коши**

$$y''+2y'+y=9e^{2x},\ y(0)=0, y'(0)=0$$

Задача 16. **Найти решение задачи Коши**

$$y''+y=\frac{1}{\sin x},\ y(\frac{\pi}{2})=1,\ y'(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}$$

Вариант 40

Задача 1. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$\sqrt{3+y^2}\,dx - y\,dy = x^2 y\,dy$$

Задача 2. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$xy' = 3\sqrt{x^2+y^2} + y$$

Задача 3. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' = \frac{x+4y-7}{8x-2y-3}$$

Задача 4. **Найти общее решение дифференциального уравнения.**

$$y' + \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{2x^2}{1+x^2}$$

Задача 5. **Найти решение задачи Коши**

$$4y'x^2 + y = -e^{\frac{1}{2x}}, \quad y(\frac{1}{2}) = e$$

Задача 6. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$7y' + 14xy = 2x^3 y^3$$

Задача 7. **Найти решение задачи Коши**

$$y' - y\,tgx = -\frac{2}{3}y^4 \sin x,\ y(0) = 1$$

Задача 8. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' + \frac{2x}{x^2+1}y' = 2x$$

Задача 9. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' = 2y^3,\ y(-1) = 1,\ y'(-1) = 1$$

Задача 10. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' + 8y' + 32y = 0$$

Задача 11. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''' - 3y'' - 2y' = 0$$

Задача 12. **Найти общий интеграл дифференциального уравнения**

$$y'' - 6y' + 10y = 51e^{-x}$$

Задача 13. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y'' + 2y' = 4e^x(\sin x + \cos x)$$

Задача 14. **Найти общее решение дифференциального уравнения**

$$y''' - 81y' = 162e^{9x} + 81\sin 9x$$

Задача 15. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' + y = \sin 2x,\ y(0) = 0, y'(0) = 0$$

Задача 16. **Найти решение задачи Коши**

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

Методические указания к выполнению расчетно-графических заданий

<u>Задача 1.</u> Найти общий интеграл дифференциального уравнения $(2xy+3y)dx+(xy-2x)dy=0$.

<u>Решение.</u>

Вынесем за скобки общие множители:

$$y(2x+3)dx+x(y-2)dy=0.$$

Предположив, что $x\neq 0,\ y\neq 0$ разделим обе части данного уравнения на xy, получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{2x+3}{x}dx+\frac{y-2}{y}dy=0.$$

Упростим полученное уравнение, поделив почленно:

$$\left(2+\frac{3}{x}\right)dx+\left(1-\frac{2}{y}\right)dy=0.$$

Интегрируя уравнение, последовательно находим (произвольную постоянную можно представить в виде $ln|C|$):

$$\int\left(2+\frac{3}{x}\right)dx+\int\left(1-\frac{2}{y}\right)dy=ln|C|,$$

$$2x+3ln|x|+y-2ln|y|=ln|C|,$$

$$2x+y=ln|C|-3ln|x|+2ln|y|,$$

$$2x+y=ln\left|\frac{Cy^2}{x^3}\right|.$$

<u>Задача 2.</u> Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$2x^2 y' = x^2 + y^2$.

<u>Решение.</u>

Так как функции $2x^2$ и $x^2 + y^2$ - однородные второго порядка, то данное уравнение – однородное.

Сделаем замену $u = \dfrac{y}{x},\ y = ux,\ y' = u + u'x$.

Тогда

$$2x^2(u + u'x) = x^2 + (ux)^2,\quad 2x^2(u + u'x) = x^2(1 + u^2).$$

Предполагая, что $x \neq 0$, сокращаем обе части уравнения на x^2. В результате получим:

$$2(u + u'x) = 1 + u^2, \qquad 2u + 2u'x = 1 + u^2,$$

$$2u'x = 1 + u^2 - 2u, \qquad 2x\frac{du}{dx} = 1 + u^2 - 2u.$$

Разделяя переменные, последовательно находим:

$$\frac{du}{1 + u^2 - 2u} = \frac{dx}{2x},\quad \frac{du}{u^2 - 2u + 1} = \frac{1}{2}\frac{dx}{x},$$

$$\frac{du}{(u-1)^2} = \frac{1}{2}\frac{dx}{x},\quad \int\frac{du}{(u-1)^2} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x},$$

$$\int (u-1)^{-2}du = \frac{1}{2}ln|x| + ln|C|,$$

$$\frac{(u-1)^{-1}}{-1} = ln\left|C\sqrt{x}\right|,$$

$$-\frac{1}{u-1} = ln\left|C\sqrt{x}\right|,.$$

$$\frac{1}{1-u} = ln\left|C\sqrt{x}\right|.$$

В полученное выражение вместо u подставим значение $\frac{y}{x}$, затем упростим полученный общий интеграл:

$$\frac{1}{1-\frac{y}{x}} = ln\left|C\sqrt{x}\right|, \qquad \frac{1}{\frac{x-y}{x}} = ln\left|C\sqrt{x}\right|,$$

$$\frac{x}{x-y} = ln\left|C\sqrt{x}\right|, \qquad x = (x-y)ln\left|C\sqrt{x}\right|$$

Разрешив его относительно y, найдем общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$y = x - \frac{x}{ln\left|C\sqrt{x}\right|}.$$

<u>Задача 3.</u> Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$y' = -\frac{2x+y+1}{x+2y-1}.$$

<u>Решение.</u>

Дифференциальные уравнения вида $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

при $a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2 \neq 0$ приводятся к однородным с помощью подстановки

$$x = u + \alpha, \; y = v + \beta \;,$$

где $(\alpha, \beta)-$ точка пересечения прямых

$a_1x+b_1y+c_1=0$ и $a_2x+b_2y+c_2=0.$

Если же $a_1\cdot b_2-b_1\cdot a_2=0$, то подстановка $t=a_1x+b_1y$ позволит разделить переменные.

Данное уравнение относится к первому типу, т.к.

$a_1=-2,\cdot b_1=-1,\cdot a_2=1,b_2=2$ и

$a_1\cdot b_2-b_1\cdot a_2=-2\cdot 2-(-1)\cdot 1=-4+1=-3\neq 0$.

Находим точку пересечения прямых $2x+y+1=0$ и $x+2y-1=0$ получим

$$x=\alpha=-1,\ y=\beta=1.$$

Произведем замену переменных в исходном уравнении, полагая

$$x=u+\alpha=u-1,\ y=v+\beta=v+1,\quad dx=du,\ dy=dv.$$

Тогда данное уравнение примет вид:

$$\frac{dv}{du}=-\frac{2(u-1)+(v+1)+1}{u-1+2(v+1)-1}$$

упростим

$$\frac{dv}{du}=-\frac{2u-2+v+1+1}{u-1+2v+2-1}$$ или

$$\frac{dv}{du}=-\frac{2u+v}{u+2v}.$$

В полученном однородном уравнении сделаем замену

$t=\dfrac{v}{u},\quad v=t\cdot u,\quad dv=tdu+udt,$ получим

$$\frac{tdu+udt}{du}=-\frac{2u+tu}{u+2tu}$$ преобразуем уравнение:

$$\frac{tdu}{du}+\frac{udt}{du}=-\frac{u(2+t)}{u(1+2t)};$$

Упростим уравнение:

$$t+u\frac{dt}{du}=-\frac{2+t}{1+2t};$$

$$u\frac{dt}{du}=-t-\frac{2+t}{1+2t};$$

$$u\frac{dt}{du}=-\frac{t(1+2t)+2+t}{1+2t};$$

$$u\frac{dt}{du}=-\frac{t+2t^2+2+t}{1+2t}$$

$u\frac{dt}{du}=-\frac{2t^2+2t+2}{1+2t}$ - получили дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

Упростим:

$$\frac{du}{u}=-\frac{1+2t}{2t^2+2t+2}dt$$

В результате интегрирования получим:

$$ln|uc|=-\frac{1}{2}ln|t^2+t+1|,$$

Учитывая свойства логарифма, получим:

$ln|uc|=ln|t^2+t+1|^{-\frac{1}{2}}$, или

$$uc=(t^2+t+1)^{-\frac{1}{2}}.$$

Возведем обе части полученного равенства в квадрат и преобразуем:

$$u^2c=(t^2+t+1)^{-1}$$

$$u^2\cdot(t^2+t+1)=c.$$

Вернемся к замене $t=\frac{v}{u}$ и получим

$$u^2 \cdot \left(\left(\frac{v}{u} \right)^2 + \frac{v}{u} + 1 \right) = c; \qquad v^2 + vu + u^2 = c.$$

Возвратимся к переменным x и y ($x = u - 1,\ y = v + 1$),

т.е. $u = x + 1,\quad v = y - 1$ и после упрощения получим общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$(y-1)^2 + (y-1)(x+1) + (x+1)^2 = c;$$

$$y^2 - 2y + 1 + yx + y - x - 1 + x^2 + 2x + 1 = c;$$

$$y^2 + yx - y + x + x^2 = c_1.$$

<u>Задача 4.</u> Найти общий интеграл дифференциального уравнения $2xy' = 2y + x^2$.

<u>Решение.</u>

Данное уравнение является линейным относительно функции $y(x)$.

Действительно $y' = \dfrac{2y + x^2}{2x}$, $y' = \dfrac{2y}{2x} + \dfrac{x^2}{2x}$,

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{2} \quad \text{или} \quad y' - \frac{y}{x} = \frac{x}{2}.$$

Приведенное уравнение можно решить двумя способами: методом вариации постоянных или методом Бернулли.

Применим подстановку Бернулли $y = uv,\ y' = u'v + v'u$,

в результате получим: $u'v + v'u - \dfrac{uv}{x} = \dfrac{x}{2}$.

Вынесем за скобки общий множитель: $v(u' - \dfrac{u}{x}) + v'u = \dfrac{x}{2}$.

Находим частное решение уравнения $u' - \frac{u}{x} = 0$

разделяя переменные и интегрируя его: $\frac{du}{dx} = \frac{u}{x}$, $\frac{du}{u} = \frac{dx}{x}$,

$\int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x}$, $ln|u| = ln|x|$, $u = x$ (выбрана одна из первообразных $u(x)$).

Далее ищем общее решение уравнения $v'u = \frac{x}{2}$, где $u = x$. Имеем:

$v' x = \frac{x}{2}$, $v' = \frac{1}{2}$,

$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2}$, $dv = \frac{1}{2}dx$,

$dv = \frac{1}{2}dx$, $v = \frac{1}{2}x + C$.

Общее решение исходного уравнения

$$y = uv = x\left(\frac{1}{2}x + C\right) = \frac{1}{2}x^2 + Cx.$$

<u>Задача 5.</u> Найти решение задачи Коши $y' - \frac{y}{2\sqrt{x}} = 2e^{\sqrt{x}}$, $y(0) = 1$.

<u>Решение.</u>

Данное уравнение является линейным относительно функции $y(x)$.

Для решения уравнения применим подстановку Бернулли:

$y = uv$, $y' = u'v + v'u$,

в результате получим: $u'v + v'u - \frac{uv}{2\sqrt{x}} = 2e^{\sqrt{x}}$

Вынесем за скобки общий множитель: $v\left(u' - \frac{u}{2\sqrt{x}}\right) + v'u = 2e^{\sqrt{x}}$.

Находим частное решение уравнения $u' - \frac{u}{2\sqrt{x}} = 0$ разделяя переменные и интегрируя его:

$$u' = \frac{u}{2\sqrt{x}}, \qquad \frac{du}{dx} = \frac{u}{2\sqrt{x}},$$

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \qquad \int\frac{du}{u} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x}},$$

$$\int\frac{du}{u} = \frac{1}{2}\int x^{-\frac{1}{2}}dx \qquad ln|u| = x^{\frac{1}{2}},$$

$u = e^{x^{\frac{1}{2}}}$ или $u = e^{\sqrt{x}}$ (выбрана одна из первообразных $u(x)$).

Теперь найдем общее решение уравнения $v'u = 2e^{\sqrt{x}}$, где $u = e^{x^{\frac{1}{2}}}$.

Имеем:

$$v'e^{\sqrt{x}} = 2e^{\sqrt{x}}, \qquad v' = 2,$$

$$\frac{dv}{dx} = 2, \qquad dv = 2dx,$$

$$\int dv = 2\int dx, \qquad v = 2x + C.$$

Общее решение исходного уравнения

$$y = uv = e^{\sqrt{x}}(2x + C).$$

Теперь выясним, при каком значении постоянной C будет выполнено указанное начальное условие. Подставляя $x = 0$, $y = 1$, получим

$$1 = e^{\sqrt{0}}(2\cdot 0 + C), \qquad C = 1.$$

При найденном значении C из общего решения получаем

$$y = e^{\sqrt{x}}(2x + 1).$$

<u>Задача 6.</u> Найти общее решение дифференциального уравнения $y' + y = 3e^{-2x} y^2$

<u>Решение.</u>

Очевидно, что данное уравнение-это уравнение Бернулли.

Для нахождения решения воспользуемся подстановкой Бернулли:

$$y = u\,v,\ y' = u'\,v + v'\,u,$$

в результате получим

$$u'\,v + v'u + u\,v = 3e^{-2x}(u\,v)^2.$$

Вынесем за скобки общий множитель

$$v(u' + u) + v'u = 3e^{-2x}(u\,v)^2.$$

Находим частное решение уравнения $u' + u = 0$, разделяя переменные и интегрируя его:

$$u' = -u,\ \frac{du}{dx} = -u,\ \frac{du}{u} = -dx,$$

$$\int \frac{du}{u} = -\int dx, \qquad ln|u| = -x,$$

$u = e^{-x}$ (выбрана одна из первообразных $u(x)$)

Теперь найдем общее решение уравнения $v'u = 3e^{-2x}(u\,v)^2$, где $u = e^{-x}$

Имеем

$$v'\,e^{-x} = 3e^{-2x}(e^{-x}\,v)^2; \qquad v'\,e^{-x} = 3e^{-2x}\,e^{-2x}\,v^2;$$

$$v' = 3e^{-3x}\,v^2; \qquad \frac{dv}{dx} = 3e^{-3x}\,v^2;$$

$$\frac{dv}{v^2} = 3e^{-3x}dx; \qquad \int \frac{dv}{v^2} = 3\int e^{-3x}dx;$$

$$-\frac{1}{v} = e^{-3x} + C; \qquad v = \frac{1}{e^{-3x} + C}.$$

Общее решение исходного уравнения

$$y = u\,v = e^{-x} \cdot \frac{1}{e^{-3x} + C} = \frac{1}{(e^{-3x} + C)e^{x}}.$$

<u>Задача 7.</u> Найти решение задачи Коши $xy' + y = xy^2 \ln x, \quad y(1) = -1.$

<u>Решение.</u>

Разделив обе части уравнения на $x \neq 0$, получим уравнение Бернулли

$$y' + \frac{y}{x} = y^2 \ln x \ .$$

Для его решения используем подстановку Бернулли: $y = u\,v,\ y' = u'\,v + v'u$,

в результате получим: $u'\,v + v'u + \dfrac{uv}{x} = (uv)^2 \ln x$.

Вынесем за скобки общий множитель: $v(u' + \dfrac{u}{x}) + v'u = u^2 v^2 \ln x$.

Находим частное решение уравнения $u' + \dfrac{u}{x} = 0$, разделяя переменные и

интегрируя его:

$$u' = -\frac{u}{x}, \qquad \frac{du}{dx} = -\frac{u}{x},$$

$$\frac{du}{u} = -\frac{dx}{x}, \qquad \int \frac{du}{u} = -\int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|u| = -\ln|x|, \qquad u = x^{-1} \quad \text{или} \qquad u = \frac{1}{x}$$

(выбрана одна из первообразных $u(x)$).

Теперь найдем общее решение уравнения $v'u = u^2 v^2 \ln x$, где $u = \dfrac{1}{x}$.

Имеем $v' \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} v^2 \ln x$, $\quad v' = \frac{1}{x} v^2 \ln x$,

$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x} v^2 \ln x$, $\quad \frac{dv}{v^2} = \frac{\ln x}{x} dx$,

$\int \frac{dv}{v^2} = \int \frac{\ln x}{x} dx$, $\quad -\frac{1}{v} = \frac{\ln^2 x}{2} + \frac{C}{2}$,

$-\frac{1}{v} = \frac{\ln^2 x + C}{2}$, $\quad v = -\frac{2}{\ln^2 x + C}$

Общее решение исходного уравнения

$$y = uv = -\frac{2}{x(\ln^2 x + C)}.$$

Теперь выясним, при каком значении постоянной C будет выполнено указанное начальное условие. Подставляя $x = 1$, $y = -1$, получим

$$-1 = -\frac{2}{1(\ln^2 1 + C)}, \quad -1 = -\frac{2}{C}, \quad C = 2.$$

При найденном значении C из общего решения получаем

$$y = -\frac{2}{x(\ln^2 x + 2)}.$$

<u>Задача 8.</u> Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' ctgx + y'' = 2$.

<u>Решение.</u>

Данное дифференциальное уравнение 2-го порядка не содержит искомой функции *y* и содержит переменную *x*, поэтому для решения уравнения введем новую функцию $p = y''$, тогда $\quad p' = y'''$.

Исходное уравнение примет вид:

$p' ctgx + p = 2$ или $p' ctgx = 2 - p$.

Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$\frac{dp}{dx} ctgx = 2 - p, \qquad \frac{dp}{2-p} = \frac{dx}{ctgx},$$

$$\int \frac{dp}{2-p} = \int \frac{dx}{ctgx} \qquad -ln|2-p| = -ln|cos\,x| - ln\,C_1,$$

$$ln|2-p| = ln|C_1 cos\,x| \quad \text{или} \quad 2 - p = C_1 cos\,x,$$

откуда $p = 2 - C_1 cos\,x$.

Так как $p = y''$, то придем к уравнению $y'' = 2 - C_1 cos\,x$, которое легко решается с помощью двукратного интегрирования:

$$y'' = 2 - C_1 cos\,x, \qquad \int y''dx = \int (2 - C_1 cos\,x)dx,$$

$$y' = 2x - C_1 sin\,x + C_2, \qquad \int y'\,dx = \int (2x - C_1 sin\,x + C_2)dx,$$

$$y = x^2 + C_1 cos\,x + C_2 x + C_3.$$

<u>Задача 9.</u> Найти решение задачи Коши

$$y\,y'' + \frac{9}{y^2} = 0, \quad y(0) = \frac{1}{3}, \quad y'(0) = 9.$$

<u>Решение.</u>

Данное дифференциальное уравнение 2-го порядка содержит искомую функцию y и не содержит явно переменную x, поэтому для решения уравнения введем новую функцию $p = y'$, тогда $p\,p' = y''$.

Исходное уравнение примет вид:

$$y\,p\,p' + \frac{9}{y^2} = 0 \quad \text{или}$$

$$y\,p\,p' = -\frac{9}{y^2}, \quad y\,p\frac{dp}{dy} = -\frac{9}{y^2},$$

$$pdp = -\frac{9}{y^3}dy, \qquad pdp = -9\,y^{-3}dy,$$

$$\int pdp = -9\int y^{-3}dy, \quad \frac{p^2}{2} = \frac{9}{2\,y^2} + \frac{C_1}{2}.$$

Так как $p = y'$, то придем к уравнению $\frac{(y')^2}{2} = \frac{9}{2\,y^2} + \frac{C_1}{2}$ или

$$(y')^2 = \frac{9}{y^2} + C_1.$$

Постоянную C_1 можно найти на данном этапе, если, положив x=0 ,

использовать начальные условия: $y(0) = \frac{1}{3}, \quad y'(0) = 9;$

$$(9)^2 = \frac{9}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} + C_1, \qquad 81 = 81 + C_1, \quad C_1 = 0.$$

Следовательно, решаем уравнение $(y')^2 = \frac{9}{y^2},$

$y' = \frac{3}{y}$ (при извлечении корня для определенности выбран знак

плюс; это оправдано тем, что в точке x=0 y и y' имеют одинаковый знак).

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{y}, \qquad ydy = 3dx,$$

$$\frac{y^2}{2} = 3x + \frac{C_2}{2}, \qquad y^2 = 6x + C_2.$$

Найдем постоянную C_2 из условия $y(0) = \frac{1}{3}$:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 6\cdot 0 + C_2, \qquad C_2 = \frac{1}{9}.$$

Следовательно:

$$y^2 = 6x + \frac{1}{9}.$$

<u>Задача 10</u>. Найти общее решение дифференциального уравнения

$2y'' + 2y' + 5y = 0$.

<u>Решение.</u>

Это однородное линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Для его решения составим характеристическое уравнение:

$$2k^2 + 2k + 5 = 0.$$

$$k_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 2\cdot 5}}{2\cdot 2} \quad \text{или} \quad k_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-36}}{4},$$

$$k_{1,2} = \frac{-2 \pm 6i}{4},$$

$$k_{1,2} = -\frac{2}{4} \pm \frac{6i}{4}, \qquad k_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3i}{2}.$$

Следовательно, общее решение уравнения примет вид

$$y = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 cos\frac{3}{2}x + C_2 sin\frac{3}{2}x\right).$$

<u>Задача 11.</u> Найти общее решение дифференциального уравнения

$y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0$.

<u>Решение.</u>

Это однородное линейное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами.

Для его решения составим характеристическое уравнение:

$$k^3 + 6k^2 + 12k + 8 = 0.$$

Методом подбора найдем первый корень данного уравнения: $k_1 = -2$.

Поделим «уголком» многочлен $k^3 + 6k^2 + 12k + 8$ на $k + 2$:

$$\begin{array}{l|l}
k^3 + 6k^2 + 12k + 8 & \underline{k+2} \\
\underline{k^3 + 2k^2} & k^2 + 4k + 4 \\
\quad 4k^2 + 12k & \\
\quad \underline{4k^2 + 8k} & \\
\qquad\quad 4k + 8 & \\
\qquad\quad \underline{4k + 8} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Для нахождения остальных корней уравнения необходимо решить уравнение

$$k^2 + 4k + 4 = 0 \qquad \text{или} \qquad (k+2)^2 = 0.$$

Следовательно, $k_{2,3} = -2$.

В данном случае общее решение исходного уравнения примет вид:

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + C_3 x^2 e^{-2x}.$$

<u>Задача 12.</u> Найти общее решение дифференциального уравнения

$y^{(4)} - 3y'' = 9x^2$.

<u>Решение.</u>

Имеем линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

Для нахождения его решения необходимо:

1) найти общее решение y_o соответствующего однородного уравнения;

2) найти частное решение y^* соответствующее правой части данного уравнения;

3) по формуле $y = y_o + y^*$ получить общее решение исходного уравнения.

Составляем характеристическое уравнение, находим его корни и общее решение y_o соответствующего однородного уравнения:

$$k^4 - 3k^2 = 0, \qquad k^2(k^2 - 3) = 0,$$

$$k_{1,2} = 0, \qquad k_{3,4} = \pm\sqrt{3}.$$

$$y_0 = C_1 e^{0x} + C_2 x e^{0x} + C_3 e^{\sqrt{3}x} + C_4 e^{-\sqrt{3}x} \quad \text{или}$$

$$y_0 = C_1 + C_2 x + C_3 e^{\sqrt{3}x} + C_4 e^{-\sqrt{3}x}.$$

В исходном уравнении правая часть – специальная, относящаяся к частному случаю (является многочленом второй степени). Число 0 является двукратным корнем характеристического уравнения, т.к. $k_{1,2} = 0$.

Следовательно, частное решение y^* имеет вид:

$$y^* = x^2(Ax^2 + Bx + C) \quad \text{или} \quad y^* = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2.$$

Найдем производные до четвертого порядка от функции y^*:

$$\left(y^*\right)' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx,$$

$$\left(y^*\right)'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C,$$

$$\left(y^*\right)''' = 24Ax + 6B,$$

$$\left(y^*\right)^{(4)} = 24A.$$

Подставим $\left(y^*\right)^{(4)}$ и $\left(y^*\right)''$ в исходное уравнение:

$$24A - 3(12Ax^2 + 6Bx + 2C) = 9x^2,$$

упростим полученное тождество

$$24A - 36Ax^2 - 18Bx - 6C = 9x^2,$$

$$-36Ax^2 - 18Bx + 24A - 6C = 9x^2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, стоящие в левой и правой частях последнего тождества, получим систему алгебраических уравнений для определения A, B и C:

$$x^2: \ -36A = 9,$$

$$x^1: \ -18B = 0,$$

$$x^0: 24A - 6C = 0,$$

откуда $A = -\frac{1}{4}, B = 0, C = -1$.

Следовательно, $y^* = -\frac{1}{4}x^4 - x^2$.

Тогда общее решение исходного уравнения примет вид:

$$y = C_1 + C_2x + C_3e^{\sqrt{3}x} + C_4e^{-\sqrt{3}x} - \frac{1}{4}x^4 - x^2.$$

<u>Задача 13.</u> Найти общее решение дифференциального уравнения

$y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(x^2 + x)$.

<u>Решение.</u>

Это линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

Составляем характеристическое уравнение, находим его корни и общее решение y_o соответствующего однородного уравнения:

$$k^2 - 3k + 2 = 0, \quad k_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1},$$

$$k_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2}, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = 2.$$

$$y_0 = C_1 e^{1x} + C_2 e^{2x} \quad \text{или} \quad y_0 = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}.$$

В исходном уравнении правая часть – специальная, относящаяся к частному случаю. Число 3 (из степени числа *e* правой части исходного уравнения) не является корнем характеристического уравнения, т.к. $k_1 = 1, \quad k_2 = 2$.

Следовательно, частное решение y^* имеет вид:

$$y^* = e^{3x}(Ax^2 + Bx + C).$$

Найдем производные первого и второго порядка от функции y^*:

$$(y^*)' = 3e^{3x}(Ax^2 + Bx + C) + e^{3x}(2Ax + B),$$

$$(y^*)' = e^{3x}(3Ax^2 + 3Bx + 3C + 2Ax + B),$$

$$(y^*)' = e^{3x}(3Ax^2 + x(3B + 2A) + 3C + B)$$

$$(y^*)'' = 3e^{3x}(3Ax^2 + x(3B + 2A) + 3C + B) + e^{3x}(6Ax + 3B + 2A),$$

$$\left(y^*\right)''=e^{3x}(9Ax^2+x(9B+6A+6A)+9C+3B+3B+2A)$$

$$\left(y^*\right)''=e^{3x}(9Ax^2+x(9B+12A)+9C+6B+2A).$$

Подставим $\left(y^*\right)''$, $\left(y^*\right)'$ и $\left(y^*\right)$ в исходное уравнение:

$$e^{3x}(9Ax^2+x(9B+12A)+9C+6B+2A)-3(e^{3x}(3Ax^2+x(3B+2A)+$$
$$+3C+B))+2(e^{3x}(Ax^2+Bx+C))=e^{3x}(x^2+x).$$

Упростим полученное тождество:

$$e^{3x}(9Ax^2+9Bx+12Ax+9C+6B+2A-9Ax^2-9Bx-6Ax-9C-3B+$$
$$+2Ax^2+2Bx+2C)=e^{3x}(x^2+x),$$

$$x^2(9A-9A+2A)+x(9B+12A-9B-6A+2B)+$$
$$+(9C+6B+2A-9C-3B+2C)=x^2+x.$$
$$x^2(2A)+x(2B+6A)+(2A+3B+2C)=x^2+x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, стоящие в левой и правой частях последнего тождества, получим систему алгебраических уравнений для определения A, B и C:

$$x^2:\ 2A=1,$$

$$x^1: 6A+2B=1,$$

$$x^0: 2A+3B+2C=0,$$

откуда $A=\frac{1}{2}, B=-1, C=1.$

Следовательно, $y^*=e^{3x}(\frac{1}{2}x^2-x+1).$

Тогда общее решение исходного уравнения примет вид:

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+e^{3x}(\frac{1}{2}x^2-x+1).$$

<u>Задача 14.</u> Найти общее решение дифференциального уравнения

$y'' + y = x\sin x + \cos 2x$.

<u>Решение.</u>

Имеем линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами, правая часть которого представляет собой сумму двух функций специального вида.

Составляем характеристическое уравнение, находим его корни и общее решение y_o соответствующего однородного уравнения:

$$k^2 + 1 = 0, \qquad k_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1},$$

$$k_{1,2} = \frac{\pm 2i}{2}, \quad k_1 = i, \quad k_2 = -i.$$

$$y_0 = e^{0x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) \text{ или } y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Правая часть исходного дифференциального уравнения представляет собой сумму двух функций специального вида: $f_1(x) = x\sin x, \quad f_2(x) = \cos 2x$.

Поэтому, найдем сначала частное решение y_1^* уравнения $y'' + y = x\sin x$.

Число $\pm i$ является однократным корнем характеристического уравнения.

Следовательно, частное решение y_1^* примет вид:

$$y_1^* = x[(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x]$$

или

$$y_1^* = (Ax^2 + Bx)\cos x + (Cx^2 + Dx)\sin x.$$

Найдем производные первого и второго порядка от функции y_1^*:

$$(y_1^*)' = (2Ax + B)\cos x - (Ax^2 + Bx)\sin x + (2Cx + D)\sin x + (Cx^2 + Dx)\cos x,$$

$$(y_1^*)' = (Cx^2 + 2Ax + Dx + B)\cos x + (-Ax^2 + 2Cx - Bx + D)\sin x.$$

$$\left(y_1^*\right)''=(2Cx+2A+D)\cos x-(Cx^2+2Ax+Dx+B)\sin x+$$
$$+(-2Ax+2C-B)\sin x+(-Ax^2+2Cx-Bx+D)\cos x,$$
$$\left(y_1^*\right)''=(2Cx+2A+D-Ax^2+2Cx-Bx+D)\cos x+$$
$$+(-Cx^2-2Ax-Dx-B-2Ax+2C-B)\sin x,$$
$$\left(y_1^*\right)''=(-Ax^2+4Cx-Bx+2A+2D)\cos x+(-Cx^2-4Ax-Dx-2B+2C)\sin x.$$

Подставим $\left(y_1^*\right)''$ и $\left(y_1^*\right)$ в уравнение $y''+y=x\sin x$:

$$(-Ax^2+4Cx-Bx+2A+2D)\cos x+(-Cx^2-4Ax-Dx-2B+2C)\sin x+$$
$$+(Ax^2+Bx)\cos x+(Cx^2+Dx)\sin x=x\sin x,$$
$$(4Cx+2A+2D)\cos x+(-4Ax-2B+2C)\sin x=x\sin x,$$
$$4Cx\cos x+(2A+2D)\cos x-4Ax\sin+(-2B+2C)\sin x=x\sin x.$$

Приравнивая коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях последнего тождества, получим систему алгебраических уравнений для определения A, B, C и D:

$$x\cos x:\quad 4C=0,$$
$$\cos x:\quad 2A+2D=0,$$
$$x\sin x:\quad -4A=1,$$
$$\sin x:\quad -2B+C=0.$$

Таким образом, $A=-\frac{1}{4}, B=0, C=0,\ D=\frac{1}{4}$.

Следовательно, $y_1^*=-\frac{x^2}{4}\cos x+\frac{x}{4}\sin x$ или $y_1^*=\frac{1}{4}(x\sin x-x^2\cos x)$.

Теперь, используя тот же метод Лагранжа, найдем частное решение y_2^* уравнения $y''+y=\cos 2x$.

Число $\pm 2i$ не является корнем характеристического уравнения. Следовательно, частное решение y_2^* примет вид:

$$y_2^*=E\cos 2x+F\sin 2x.$$

Найдем производные первого и второго порядка от функции y_2^*:

$$\left(y_2^*\right)' = -2E\sin 2x + 2F\cos 2x,$$

$$\left(y_2^*\right)'' = -4E\cos 2x - 4F\sin 2x.$$

Подставим $\left(y_2^*\right)''$ и $\left(y_2^*\right)$ в уравнение $y'' + y = \cos 2x$:

$$-4E\cos 2x - 4F\sin 2x + E\cos 2x + F\sin 2x = \cos 2x,$$

$$-3E\cos 2x - 3F\sin 2x = \cos 2x.$$

Приравнивая коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях последнего тождества, получим систему алгебраических уравнений для определения E и F:

$$\cos 2x: \quad -3E = 1$$
$$\sin 2x: \quad -3F = 0.$$

Таким образом, $E = -\dfrac{1}{3}$, $F = 0$.

Следовательно, $y_2^* = -\dfrac{\cos 2x}{3}$.

Окончательно получаем, что

$$y^* = y_1^* + y_2^* = \frac{1}{4}(x\sin x - x^2\cos x) - \frac{\cos 2x}{3}$$

и общее решение исходного дифференциального уравнения определяется функцией

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{4}(x\sin x - x^2\cos x) - \frac{\cos 2x}{3}.$$

<u>Задача 15.</u> Найти решение задачи Коши

$y'' - 7y' + 6y = (x-2)e^x, \;\; y(0) = 1, \;\; y'(0) = 3.$

<u>Решение.</u>

Это линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

Составляем характеристическое уравнение, находим его корни и общее решение y_o соответствующего однородного уравнения:

$$k^2 - 7k + 6 = 0, \quad k_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4\cdot 1\cdot 6}}{2\cdot 1}, \; .$$

$$k_{1,2} = \frac{7 \pm 5}{2}, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = 6$$

$$y_0 = C_1 e^{1x} + C_2 e^{6x} \quad \text{или} \quad y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{6x}.$$

В исходном уравнении правая часть – специальная, относящаяся к частному случаю. Число 1 (из степени числа *e* правой части исходного уравнения) является однократным корнем характеристического уравнения.

Следовательно, частное решение y^* имеет вид:

$$y^* = e^x x(Ax + B) \quad \text{или} \quad y^* = e^x(Ax^2 + Bx).$$

Найдем производные первого и второго порядка от функции y^*:

$$\left(y^*\right)' = e^x(Ax^2 + Bx) + e^x(2Ax + B),$$

$$\left(y^*\right)' = e^x(Ax^2 + x(2A + B) + B),$$

$$\left(y^*\right)'' = e^x(Ax^2 + x(2A + B) + B) + e^x(2Ax + 2A + B),$$

$$\left(y^*\right)'' = e^x(Ax^2 + x(4A + B) + 2A + 2B).$$

Подставим $\left(y^*\right)''$, $\left(y^*\right)'$ и $\left(y^*\right)$ в исходное уравнение:

$$e^x(Ax^2 + x(4A+B) + 2A + 2B) - 7e^x(Ax^2 + x(2A+B) + B) + 6e^x(Ax^2 + Bx) =$$
$$= e^x(x-2).$$

Упростим полученное тождество:

$$e^x(Ax^2 + x(4A+B) + 2A + 2B - 7Ax^2 - 7x(2A+B) - 7B + 6Ax^2 + 6Bx) =$$
$$= e^x(x-2),$$

$$e^x(Ax^2 - 7Ax^2 + 6Ax^2 + x(4A + B - 14A - 7B + 6B) + 2A + 2B - 7B) = e^x(x-2)$$
$$e^x(-10Ax + (2A - 5B)) = e^x(x-2).$$

Сокращая обе части последнего тождества на $e^x \neq 0$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях, имеем:

$$x^1 : -10A = 1$$
$$x^0 : 2A - 5B = -2,$$

откуда $A = -\frac{1}{10}, B = \frac{9}{25}$.

Следовательно, $y^* = e^x(-\frac{x^2}{10} + \frac{9x}{25})$.

Тогда общее решение исходного уравнения примет вид:

$$y = C_1e^x + C_2e^{6x} + e^x(-\frac{x^2}{10} + \frac{9x}{25}).$$

Для того чтобы решить задачу Коши, найдем y':

$$y' = C_1e^x + 6C_2e^{6x} + e^x(-\frac{x^2}{10} + \frac{9x}{25}) + e^x(-\frac{x}{5} + \frac{9}{25}),$$

$$y' = C_1e^x + 6C_2e^{6x} + e^x(-\frac{x^2}{10} + \frac{9x}{25} - \frac{x}{5} + \frac{9}{25}),$$

$$y' = C_1e^x + 6C_2e^{6x} + e^x(-\frac{x^2}{10} + \frac{4x}{25} + \frac{9}{25}).$$

Используя начальные условия, получим линейную систему уравнений для определения значений произвольных постоянных C_1 и C_2:

$$y(0) = C_1 + C_2 = 1,$$

$$y'(0) = C_1 + 6C_2 + \frac{9}{25} = 3,$$

откуда находим: $C_1 = \frac{84}{125}$, $C_2 = \frac{41}{125}$.

Следовательно, частное решение, удовлетворяющее данным начальным условиям, имеет вид:

$$y' = \frac{84}{125}e^x + \frac{41}{125}C_2 e^{6x} + e^x(-\frac{x^2}{10} + \frac{4x}{25} + \frac{9}{25}).$$

<u>Задача 16.</u> Найти решение задачи Коши

$$y'' - 2y' + 5y = e^x tg 2x, \quad y(0) = \frac{1}{4}, \quad y'(0) = \frac{1}{4}.$$

<u>Решение.</u>

Сначала найдем общее решение данного дифференциального уравнения.

Составляем характеристическое уравнение, находим его корни и общее решение y_o соответствующего однородного уравнения:

$$k^2 - 2k + 5 = 0, \quad k_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1}, \ .$$

$$k_{1,2} = \frac{2 \pm 4i}{2}, \quad k_{1,2} = 1 \pm 2i$$

$$y_0 = e^{1x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) \ \text{ или } \ y_0 = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Правая часть исходного дифференциального уравнения не является функцией специального вида, поэтому частное решение y^* необходимо

искать методом вариации постоянных.

Так как

$$y_0 = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x), \text{ то}$$

$$y^* = C_1(x)e^x \cos 2x + C_2(x)e^x \sin 2x.$$

Составим систему линейных уравнений для нахождения C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x \cos 2x + C_2'(x)e^x \sin 2x = 0, \\ C_1'(x)(e^x \cos 2x)' + C_2'(x)(e^x \sin 2x)' = e^x tg\, 2x. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x \cos 2x + C_2'(x)e^x \sin 2x = 0, \\ C_1'(x)(e^x \cos 2x - 2e^x \sin 2x) + C_2'(x)(e^x \sin 2x + 2e^x \cos 2x) = e^x tg\, 2x. \end{cases}$$

Сократив уравнения данной системы на $e^x \neq 0$, получим:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0, \\ C_1'(x)(\cos 2x - 2\sin 2x) + C_2'(x)(\sin 2x + 2\cos 2x) = tg\, 2x. \end{cases}$$

Решение системы найдем по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ \cos 2x - 2\sin 2x & \sin 2x + 2\cos 2x \end{vmatrix} =$$

$$= \cos 2x(\sin 2x + 2\cos 2x) - \sin 2x(\cos 2x - 2\sin 2x) =$$

$$= \cos 2x \sin 2x + 2\cos^2 2x - \sin 2x \cos 2x + 2\sin^2 2x = 2\cos^2 2x + 2\sin^2 2x =$$

$$= 2(\cos^2 2x + \sin^2 2x) = 2$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ tg\, 2x & \sin 2x + 2\cos 2x \end{vmatrix} = 0(\sin 2x + 2\cos 2x) - \sin 2x\, tg\, 2x = -\sin 2x\, tg\, 2x.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ \cos 2x - 2\sin 2x & tg\, 2x \end{vmatrix} = \cos 2x\, tg\, 2x - 0(\cos 2x - 2\sin 2x) = \cos 2x\, tg\, 2x.$$

Тогда

$$C_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-\sin 2x\, tg 2x}{2} = -\frac{\sin^2 2x}{2\cos 2x},$$

$$C_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\cos 2x\, tg 2x}{2} = \frac{\sin 2x}{2}.$$

Теперь проинтегрируем полученные равенства:

$$C_1 = -\frac{1}{2}\int \frac{\sin^2 2x}{2\cos 2x}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1-\cos^2 2x}{2\cos 2x}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos 2x} + \frac{1}{2}\int \frac{\cos^2 2x}{\cos 2x}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos 2x} + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx = \frac{1}{4}\ln\left|tg(\frac{\pi}{4} - x)\right| + \frac{1}{4}\sin 2x,$$

$$C_2 = \frac{1}{2}\int \sin 2x dx = -\frac{1}{4}\cos 2x.$$

Следовательно,

$$y^* = (\frac{1}{4}\ln\left|tg(\frac{\pi}{4} - x)\right| + \frac{1}{4}\sin 2x)e^x \cos 2x + (-\frac{1}{4}\cos 2x)e^x \sin 2x,$$

$$y^* = \frac{1}{4}e^x \cos 2x \ln\left|tg(\frac{\pi}{4} - x)\right| + \frac{1}{4}e^x \sin 2x \cos 2x - \frac{1}{4}e^x \cos 2x \sin 2x,$$

$$y^* = \frac{1}{4}e^x \cos 2x \cdot \ln\left|tg(\frac{\pi}{4} - x)\right|.$$

Тогда общее решение исходного уравнения примет вид:

$$y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{1}{4}e^x \cos 2x \cdot \ln\left|tg(\frac{\pi}{4} - x)\right|.$$

Чтобы решить задачу Коши, вычислим значения произвольных постоянных C_1 и C_2 в общем решении, используя начальные условия $y(0) = \frac{1}{4}$, $y'(0) = \frac{1}{4}$.

Найдем производные первого и второго порядка функции y:

$$y' = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + e^x(-2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x) +$$

$$+\frac{1}{4}e^{x}\cos 2x\cdot \ln\left|tg(\frac{\pi}{4}-x)\right|-\frac{1}{4}e^{x}\frac{\cos 2x\cdot}{tg(\frac{\pi}{4}-x)\cdot\cos^{2}(\frac{\pi}{4}-x)}-$$

$$-\frac{1}{2}e^{x}\sin 2x\cdot \ln\left|tg(\frac{\pi}{4}-x)\right|.$$

Подставляя значение $x=0$ в выражения для y и y', с учетом начальных условий получаем:

$$y(0)=e^{0}(C_1\cos 0+C_2\sin 0)+\frac{1}{4}e^{0}\cos 0\cdot \ln\left|tg(\frac{\pi}{4}-0)\right|=C_1+\frac{1}{4}=\frac{1}{4},$$

$$y'(0)=e^{0}(C_1\cos 0+C_2\sin 0)+e^{0}(-2C_1\sin 0+2C_2\cos 0)+\frac{1}{4}e^{0}\cos 0\cdot \ln\left|tg(\frac{\pi}{4}-0)\right|-$$

$$-\frac{1}{4}e^{0}\frac{\cos 0\cdot}{tg(\frac{\pi}{4}-0)\cdot\cos^{2}(\frac{\pi}{4}-0)}-\frac{1}{2}e^{0}\sin 0\cdot \ln\left|tg(\frac{\pi}{4}-0)\right|=C_1+2C_2-\frac{1}{4}=\frac{1}{4},$$

откуда находим $C_1=0$, $C_2=\frac{1}{4}$.

Следовательно, искомое частное решение

$$y=\frac{1}{4}e^{x}\left(\sin 2x+\cos 2x\cdot \ln\left|tg(\frac{\pi}{4}-x)\right|\right).$$

Рекомендуемая литература

1. Демидович Б. П., Моденов В. П. Дифференциальные уравнения: Учебное пособие. 3-е изд., стер. – Спб.: Издательство «Лань», 2008. – 288 с.

2. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями, 4-е изд., исправ. – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 256 с.

3. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. Т. III / Пред. и прим. А.А. Флоринского. 8-е изд.- М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011 – 728 с.